Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления
Кафедра теории управления

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Кучкаров Ильдус Ильдарович

Область асимптотической устойчивости однородных дифференциальных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
заслуженный работник ВШ РФ,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Жабко А. П.

Рецензент,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Прасолов А. В.

Санкт-Петербург
2017

Содержание

Введение

Современное математическое моделирование процессов и систем часто основано на теории дифференциальных уравнений. Широко известным примером физической модели с использованием этого математического аппарата является второй закон Ньютона.

Однако далеко не все процессы происходят мгновенно, поэтому на скорость порой влияет не текущее, а некоторое прошлое состояние системы. Здесь появляются дифференциальные уравнения с запаздыванием, которые учитывают, например, задержку реакции водителя при моделировании динамики транспортных потоков, время на принятие решений и траспортировку в цепях поставок, взросление особей при анализе динамики популяций.

Наиболее изученным классом такой абстракции являются линейные системы с постоянным запаздыванием. Для них известны способы построения решения и некоторые критерии устойчивости.

При исследовании сложных систем часто рассматривают не её саму, а некоторое линейное приближение. Однако возможна ситуация, когда первое в широком смысле приближение не содержит линейных членов, в этом случае и появляются однородные уравнения порядка выше 1.

Запаздывания также могут быть различными. Выше упоминались постоянные запаздывания, это наиболее частый и простой их вид, а потому наиболее изученный. Тем не менее в некоторых случаях запаздывание возрастает с течением времени, например, в [11] построена математическая модель смесительного бака в виде системы линейных уравнений с запаздыванием, пропорциональным времени. Кроме того в [12] для описания движения по кольцевой дороге также используют линейно возрастающее запаздывание.

В данной работе исследуется устойчивость одного класса однородных дифференциальных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием, который появляется, например, при математическом моделировании работы информационного сервера в [10].

Работа состоит из трёх глав. В первой главе рассмотрены функционалы полного типа для линейных систем с постоянным и линейно возрастающим запаздываниями. Эти функционалы используются при исследовании устойчивости. Во второй главе рассматриваются однородные уравнения с запаздыванием, пропорциональным времени, и представлен основной результат этой работы. В третьей главе предложен метод численного интегрирования однородного уравнения с линейным запаздыванием. В заключении подводятся итоги исследования, формируются выводы по рассматриваемой теме.

Постановка задачи

Рассмотрим произвольную дифференциально-разностную систему уравнений с одним запаздыванием

$$\dot{y} = f(t, y(t), y(t - \tau(t))) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(t) = \psi(t),\ t \in E_{t_0}, \tag{2}$$

где $y \in \mathbf{R}^n$, $f \in C^0(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$, $\tau > 0$, $\psi(t)$ — векторная кусочно-непрерывная функция, $E_{t_0} = \{t_0\} \cup \{t - \tau(t) < t_0 \mid t \geqslant t_0\}$ — начальное множество. Также предположим, что (1) является системой в отклонениях от положения равновесия, т. е. у системы (1) есть нулевое решение: $f(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. Для такой системы исследуют поведение решений при ненулевом начальном условии.

Определение 1. *Нулевое решение уравнения (1) устойчиво по Ляпунову, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ и всякого начального момента времени $t_0 > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon, t_0)$, что для всякой начальной функции $\psi(t)$, удовлетворяющей условию $\|\psi(t)\| < \delta$ при $t \in E_{t_0}$, для решения уравнения (1) с начальными условиями (2) $y = y(t, t_0, \psi)$ справедливо соотношение $\|y(t, t_0, \psi)\| < \varepsilon$ при всех значениях $t \geqslant t_0$.*

Обычно нас интересует не столько устойчивость при некотором воздействии, сколько возврат в исходное состояние после прекращения воздействия.

Определение 2. *Нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову в смысле определения 1, и для любого $t_0 > 0$ можно указать такое число $\delta_1 > 0$, что для всякой начальной функции $\psi(t)$, удовлетворяющей условию $\|\psi(t)\| < \delta_1$ при $t \in E_{t_0}$, для решения уравнения (1) с начальными условиями (2) $y = y(t, t_0, \psi)$ справедливо предельное соотношение $\|y(t, t_0, \psi)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.*

Определение 3. *Множество $A \subset \mathbf{R}_+ \times PC(E_{t_0}, \mathbf{R}^n)$ называется областью асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), если для любых $(t_0, \psi(t)) \in A$ выполнено условие $\|y(t, t_0, \psi)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.*

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение с запаздыванием пропорциональным времени, т. е. $\tau = (1-\alpha)t,\ 0 < \alpha < 1$,

$$\dot{x} = ax^3(t) + bx^3(\alpha t), \quad t \geqslant t_0 > 0 \tag{3}$$

с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\alpha t_0, t_0], \quad t_0 > 0, \tag{4}$$

где $x \in \mathbf{R}, a, b$ - некоторые вещественные числа, $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная функция.

Известно [10], что нулевое решение уравнения (3) асимптотически устойчиво, если $a < 0, |b| < -a$.

Задачей данной работы является нахождение области асимптотической устойчивости, как зависимости параметра δ_1 из определения 2 от параметров a, b, α и t_0 уравнения (3) с начальными условиями (4).

Обзор литературы

Как уже было сказано выше, наиболее изученным является класс линейных систем с постоянными запаздываниями, поэтому большая часть работ детально освещают только этот класс уравнений.

В [1] исследуются преимущественно линейные системы уравнений с постоянным запаздыванием с помощью преобразования Лапласа. Оно позволяет свести линейную дифференциально-разностную систему с постоянными коэффициентами и запаздываниями к линейной алгебраической системе.

В [2] помимо всего прочего описывается метод шагов, который позволяет последовательно получать решение за счет рассмотрения обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке. Этот метод и сейчас используется для численного интегрирования систем с запаздыванием. Также в [2] исследуются периодические решения дифференциально-разностных уравнений.

Основные результаты изучения устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений можно прочитать в [3]. Главными методами исследования в этой работе являются первый и второй (прямой) методы Ляпунова. Первый подразумевает непосредственное построение решения и рассмотрение его поведения с возрастанием времени. Второй же — построение положительно определенной функции Ляпунова и рассмотрение ее производной вдоль решений исходной системы уравнений.

В работах [4, 5] описаны два способа обобщения прямого метода Ляпунова на случай дифференциально-разностных систем. Н. Н. Красовский предложил рассматривать вместо функций функционал Ляпунова, который учитывает поведение решения не в одной точке, а на некотором сегменте кривой. Б. С. Разумихин вывел достаточные условия устойчивости для решений, удовлетворяющих специальному условию Разумихина.

В [6, 7, 8] доказаны критерии устойчивости дифференциальных линейных систем с запаздыванием и предложены конструктивные алгоритмы построения квадратичных функционалов Ляпунова-Красовского полного типа для линейных систем с постоянным запаздыванием. Позже в [9] построен функционал полного типа для линейных систем уже с линейно-возрастающим запаздыванием.

С помощью метода Разумихина в работе [10] исследуется устойчивость и неустойчивость однородного дифференциального уравнения с запаздыванием пропорциональным времени и получено достаточное условие асимптотической устойчивости и неустойчивости в зависимости от коэффициентов.

В [11] предложен гибридный метод анализа устойчивости и получены достаточные критерии асимптотической устойчивости и неустойчивости линейной системы с линейным запаздыванием.

В [13] линейное дифференциальное уравнение с линейно-возрастающим запаздыванием сведено к линейному нестационарному уравнению с постоянным запаздыванием. С помощью преобразования Лапласа получено достаточное условие неустойчивости.

Глава 1. Линейные системы

Линейные системы являются частным случаем однородных систем. В этой главе показаны некоторые результаты для таких систем. В частности, что для них в случае асимптотической устойчивости имеет место устойчивость в целом.

1.1 Линейные стационарные системы с постоянным запаздыванием

Рассмотрим линейную стационарную систему с постоянным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h), \tag{5}$$

где $x \in \mathbf{R}^n, h > 0$ - запаздывание, $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ - постоянные матрицы, с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \tag{6}$$

где $\varphi(t) \in \mathbf{R}^n$ — кусочно-непрерывная функция.

В дальнейшем будем полагать $t_0 = 0$. Как и в случае линейных обыкновенных дифференциальных систем уравнений, для линейных систем с запаздыванием в [1] вводится понятие фундаментальной матрицы.

Определение 4. *Матрица $K(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ называется фундаментальной для системы (5), если она удовлетворяет условиям*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}K(t) = AK(t) + BK(t-h), \quad t \geqslant 0 \\ K(0) = E \\ K(t) = 0, \quad t < 0. \end{cases}$$

Решение $x(t,\varphi)$ системы (5) с начальными условиями (6) представимо с помощью формулы Коши:

$$x(t,\varphi) = K(t)\varphi(0) + \int\limits_{-h}^{0} K(t-\theta-h)B\varphi(\theta)d\theta, \quad t \geqslant 0.$$

Кроме того, используя фундаментальную матрицу, можно исследовать устойчивость линейных систем. Легко показать, что у линейных систем либо все решения устойчивы, либо все — неустойчивы, поэтому в этом случае говорят об устойчивости системы, а не отдельного решения этой системы. Для этого вводится понятие матрицы Ляпунова.

Определение 5. *Если система (5) асимптотически устойчива по Ляпунову, то матрица*

$$U(\tau) = \int\limits_{0}^{\infty} K^T(t)WK(t+\tau)d\tau \tag{7}$$

называется матрицей Ляпунова для системы (5), ассоциированной с матрицей W.

В работе [8] получены некоторые свойства матрицы Ляпунова для асимптотически устойчивых систем. Предположив наличие этих свойств у некоторой произвольной функции $U(t)$, было показано, что её производная является некоторой квадратичной формой, матрица которой участвует в условиях для $U(t)$.

Лемма 1. [8] *Пусть система (5) является асимптотически устойчивой,* W *- положительно-определенная матрица. Тогда матрица Ляпунова (7) удовлетворяет условиям*

$$U(-\tau) = U^T(\tau), \quad \tau \geqslant 0; \tag{8}$$

$$U'(\tau) = U(\tau)A + U(\tau-h)B, \quad \tau \geqslant 0; \tag{9}$$

$$U(0)A + A^TU^T(0) + U(-h)B + B^TU^T(-h) = -W \tag{10}$$

Теорема 1. [8] *Пусть матрица $U(\tau), \tau \in [-h, h]$, удовлетворяет условиям (8)-(10). Тогда производная функционала*

$$
\begin{aligned}
v(x_t) = {} & x^T(t)U(0)x(t) + \\
& + 2x^T(t)\int_{-h}^{0} U(-\theta - h)Bx(t+\theta)d\theta + \\
& + \int_{-h}^{0} x^T(t+\theta_1)B\left(\int_{-h}^{0} U(\theta_1 - \theta_2)Bx(t+\theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1
\end{aligned}
\tag{11}
$$

вдоль решений системы (5) совпадает с $-x^T(t)Wx(t)$.

Таким образом, если W — положительно определенная матрица, то функционал (11) является функционалом Ляпунова-Красовского для линейной системы (5). В силу того, что в теореме 1 нет ограничений на норму начальной функции, в случае асимптотической устойчивости областью притяжения будет всё пространство $\mathbf{R}^n$, т.е. система будет устойчивой в целом.

1.2 Линейные системы с линейно возрастающим запаздыванием

Рассмотрим линейную систему с линейно возрастающим запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(\alpha t), \quad t \geqslant t_0 > 0, \tag{12}$$

с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\alpha t_0, t_0], \tag{13}$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $x \in \mathbf{R}^n, (1-\alpha)t > 0$ - запаздывание, $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ - постоянные матрицы, $\varphi(t) \in \mathbf{R}^n$ — кусочно-непрерывная функция.

В этом случае также вводится понятие фундаментальной матрицы, правда теперь это функция двух переменных.

Определение 6. *Матрица* $K(t,t_0) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ *называется фундаментальной матрицей для системы (12), если она удовлетворяет условиям*

$$\begin{cases} \frac{\partial K(t,t_0)}{\partial t} = AK(t,t_0) + BK(\alpha t, t_0), \quad t \geqslant t_0 \\ K(t_0,t_0) = E \\ K(t,t_0) = 0, \quad t < t_0. \end{cases}$$

Решение $x(t,t_0,\varphi)$ системы (12) с начальными условиями (13) представимо с помощью формулы Коши:

$$x(t,t_0,\varphi) = K(t,t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\alpha t_0}^{t_0} K\left(t, \frac{\tau}{\alpha}\right) B\varphi(\tau)d\tau, \quad t \geqslant t_0.$$

Аналогично, используя фундаментальную матрицу, можно исследовать устойчивость линейных систем. Для этого вводится понятие матрицы Ляпунова.

Определение 7. *Если интеграл*

$$U(t,\tau) = \int\limits_t^{\infty} K^T(s,t)WK(s,\tau)ds \tag{14}$$

сходится, то матрица $U(t,\tau)$ *называется матрицей Ляпунова для системы (12), ассоциированной с матрицей* W.

В работе [9] получены некоторые свойства матрицы Ляпунова для асимптотически устойчивых систем. Предположив наличие этих свойств у некоторой произвольной функции $U(t,\tau)$, было показано, что её производная является некоторой квадратичной формой, матрица которой участвует в условиях для $U(t,\tau)$.

Лемма 2. [9] *Пусть система (12) является асимптотически устойчивой, W - положительно-определенная матрица. Тогда матрица Ляпунова (14) удовлетворяет условиям*

$$U^T(t,\tau) = U(\tau, t), \tag{15}$$

$$\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial \tau} = -U(t,\tau)A - \frac{1}{\alpha}U\left(t, \frac{\tau}{\alpha}\right)B, \quad \tau \leqslant t \tag{16}$$

(в точке $\tau = t$ под производной понимается левосторонняя производная),

$$\frac{dU(t,t)}{dt} = -W - A^T U(t,t) - U(t,t)A - \frac{1}{\alpha}B^T U\left(\frac{t}{\alpha}, t\right) - \frac{1}{\alpha}U\left(t, \frac{t}{\alpha}\right)B. \tag{17}$$

Теорема 2. [9] *Пусть матрица $U(t,\tau)$, удовлетворяет условиям (15)-(17). Тогда производная функционала*

$$\begin{aligned} v(t, x_t) = {} & x^T(t)U(t,t)x(t) + \\ & + \frac{2}{\alpha}x^T(t)\int\limits_{\alpha t_0}^{t_0} U\left(t, \frac{\tau}{\alpha}\right)Bx(\tau)d\tau + \\ & + \frac{1}{\alpha^2}\int\limits_{\alpha t_0}^{t_0} x^T(\tau_1)B\left(\int\limits_{\alpha t_0}^{t_0} U\left(\frac{\tau_1}{\alpha}, \frac{\tau_2}{\alpha}\right)Bx(\tau_2)d\tau_2\right)d\tau_1 \end{aligned} \tag{18}$$

вдоль решений системы (12) совпадает с $-x^T(t)Wx(t)$.

Таким образом, если W — положительно определенная матрица, то функционал (18) является функционалом Ляпунова-Красовского для линейной системы (12). В силу того, что в теореме 2 нет ограничений на норму начальной функции, в случае асимптотической устойчивости областью притяжения будет всё пространство $\mathbf{R}^n$, т.е. система будет устойчивой в целом.

Глава 2. Однородные дифференциально-разностные уравнения

В данной главе рассмотрим устойчивость нулевого решения уравнения (3) с начальными условиями (4).

2.1 Достаточные критерии асимптотической устойчивости и неустойчивости

Для нулевого решения (3) в [10] с помощью метода Разумихина получены достаточные критерии асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Теорема 3. [10] *Тривиальное решение уравнения (3) асимптотически устойчиво по Ляпунову при*

$$a < 0, \quad |b| < -a$$

и неустойчиво при

$$a > 0, \quad b \geqslant -a.$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + x(0.9t). \tag{19}$$

На рис. 1 изображены графики решений для различных начальных функций:

$$\varphi(t) = \pm R$$

$$\varphi(t) = R\sin(kt), \quad k = \overline{1,10}$$

$$\varphi(t) = \pm R\frac{t - \alpha t_0}{t_0 - \alpha t_0}$$

где $t \in [0.9, 1]$, $\max\limits_{t\in[0.9,1]} |\varphi(t)| = R = 1$. Видно, что для таких начальных функций решение по модулю убывает с ростом t.

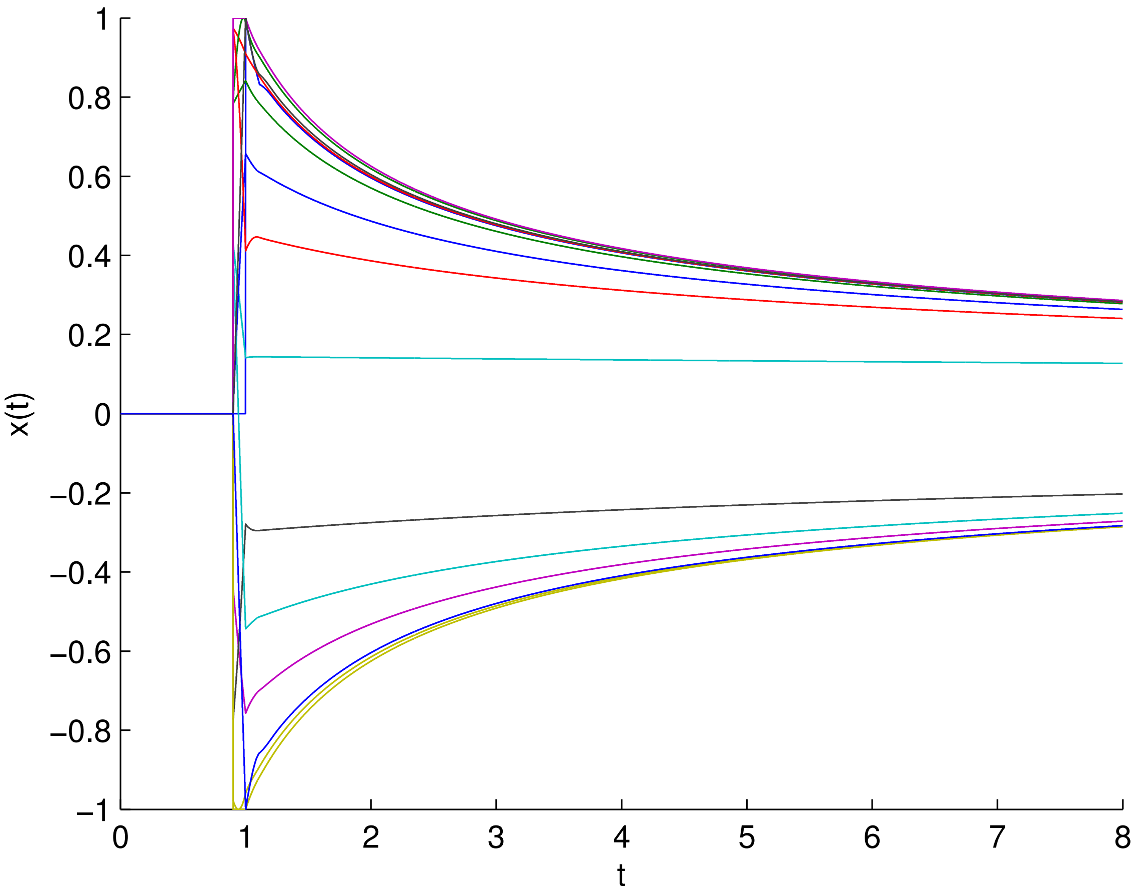

Рис. 1: График решений уравнения (19)

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2x(0.9t) \tag{20}$$

с начальными условиями

$$\varphi(t) = 1, \quad t \in [0.9, 1]$$

На рис. 2 изображен график решения. Видно, что в этом случае имеет место неустойчивость.

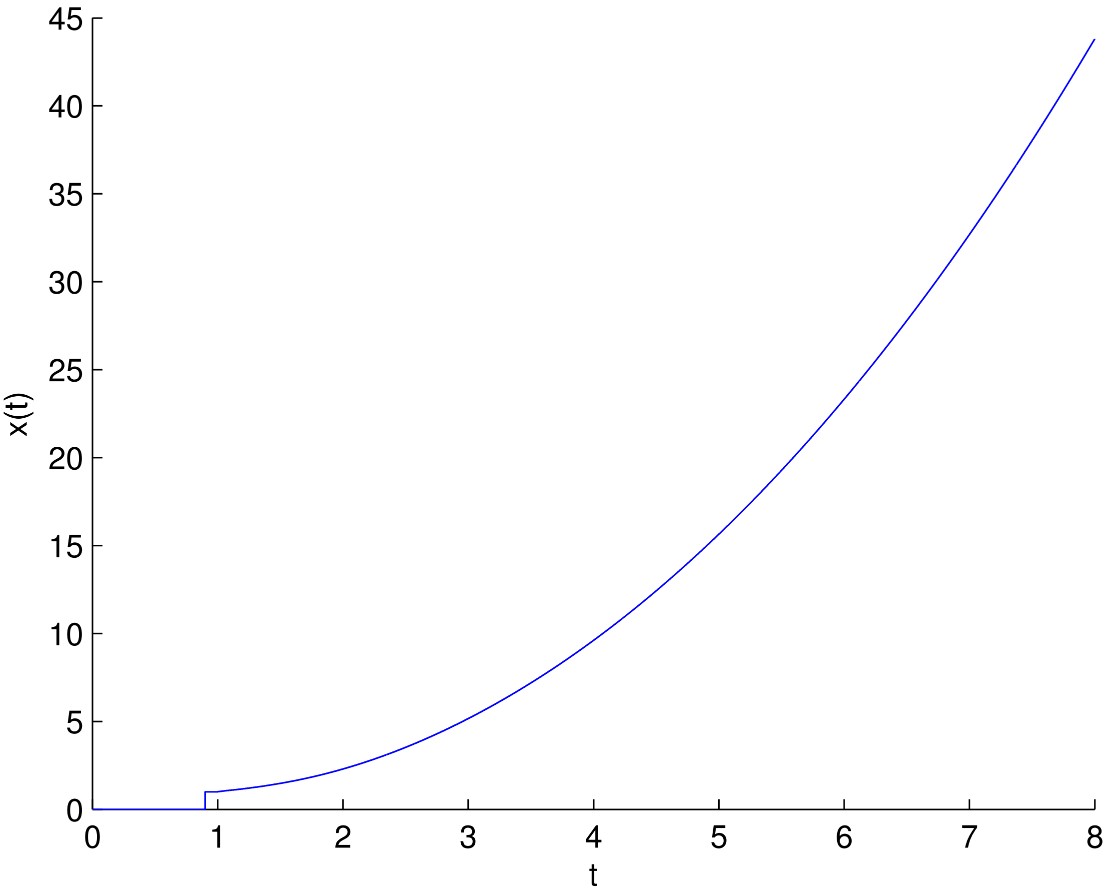

Рис. 2: График решения уравнения (20)

2.2 Область асимптотической устойчивости

В [10] с помощью идей метода Разумихина получена оценка на решение уравнения (3). Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\dot{y}(t) = (a + |b|B^3)y^3(t) \tag{21}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = y_0, \tag{22}$$

где B, y_0 — некоторые положительные числа.

Лемма 3. [10] *Если уравнения (3), (21) и начальные условия (4), (22) таковы, что выполняются соотношения:*

$$|b| < -a, \tag{23}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \leqslant B < \sqrt[3]{\frac{-a}{|b|}}, \tag{24}$$

$$2t_0 y_0^2(-a - |b|B^3) < 1 \tag{25}$$

$$By(t) \geqslant |\varphi(\alpha t)|, \quad t \in \left[t_0, \frac{t_0}{\alpha}\right], \tag{26}$$

$$y(t_0) = |\varphi(t_0)|, \tag{27}$$

то для решения уравнения (3) справедлива оценка

$$|x(t, t_0, \varphi)| \leqslant y(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Теорема 4. *Если для уравнения (3) выполняются условия*

$$|b| < -a,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \sqrt[3]{\frac{-a}{|b|}},$$

то для решения уравнения (3) справедлива оценка

$$|x(t, t_0, \varphi)| \leqslant \max_{t_1 \in [\alpha t_0, t_0]} |\varphi(t_1)|, \quad t \geqslant t_0. \tag{28}$$

Доказательство. От противного. Обозначим

$$\varepsilon = \max_{t_1 \in [\alpha t_0, t_0]} |\varphi(t_1)|$$

Пусть оценка (28) не выполняется, тогда должны существовать такие значения $\bar{t} > t_0, \delta > 0$, что

$$|x(\bar{t}, t_0, \varphi)| = \varepsilon + \delta.$$

В этом случае из непрерывности решения $x(t, t_0, \varphi)$ следует существование такого $\hat{t}$, что

$$t_0 < \hat{t} < \bar{t},$$

$$x(t, t_0, \varphi) < \varepsilon + \frac{\delta}{2}, \quad t \in [\alpha t_0, \hat{t}\,),$$

$$x(\hat{t}, t_0, \varphi) = \varepsilon + \frac{\delta}{2}.$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\dot{\hat{x}}(t) = a\hat{x}^3(t) + b\hat{x}^3(\alpha t), t \geqslant \hat{t},$$

$$\hat{x}(t) = x(t, t_0, \varphi), t \in [\alpha\hat{t}, \hat{t}],$$

решение которого обозначим $\hat{x}(t)$. Для него построим $\hat{y}(t)$ по (21) и (22).

Для $\hat{x}(t)$ и $\hat{y}(t)$ условия леммы 3 выполняются. Действительно, (23), (24) следуют из условия теоремы, (27) верно по постороению. Для выполнения (25) необходимо, чтобы $B^3 > -\frac{a}{|b|} - \frac{1}{2\hat{t}\hat{y_0^2}|b|}$. Тогда, взяв

$$B = \frac{\max\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \sqrt[3]{-\frac{a}{|b|} - \frac{1}{2\hat{t}\hat{y_0^2}|b|}}\right) + \sqrt[3]{\frac{-a}{|b|}}}{2}, \tag{29}$$

обеспечим выполнение (25) без нарушения других условий. В [10] доказано, что из (24) и (25) следует $B\hat{y}\left(\frac{\hat{t}}{\alpha}\right) > |\hat{x}(\hat{t}\,)|$. В силу убывания $\hat{y}(t)$ и выбора точки $\hat{t}$ справедливо (26).

Тогда по лемме 3 получаем, что $|\hat{x}(t)| < \hat{y}(t)$ при $t \geqslant \hat{t}$. Имеем в силу единственности решения уравнения (3)

$$|x(\bar{t})| > |x(\hat{t})| = |\hat{x}(\hat{t})| = \hat{y}(\hat{t}) > \hat{y}(\bar{t}) > |\hat{x}(\bar{t})| = |x(\bar{t})|$$

Полученное противоречие доказывает теорему. ∎

Теорема 5. *Если для уравнения (3) выполняются условия*

$$|b| < -a,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \sqrt[3]{\frac{-a}{|b|}},$$

то нулевое решение уравнения (3) асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. От противного. Предположим, что нулевое решение не является устойчивым в целом. Возьмем такие точку t_0 и начальную функцию $\varphi(t)$, что для них не выполняется

$$|x(t, t_0, \varphi)| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{30}$$

Из нарушения предельного соотношения (30) следует существование такого числа $\varepsilon > 0$, что для любого $\hat{t} > t_0$ найдется такое $\bar{t} > \hat{t}$, что $|x(\bar{t})| \geqslant \varepsilon$.

Возьмем некоторое $t_1 \gg t_0$, для которого выполняется условие

$$|x(t_1)| \geqslant \varepsilon. \tag{31}$$

Построим вспомогательное уравнение

$$\dot{x}_1(t) = ax_1^3(t) + bx_1^3(\alpha t), \quad t \geqslant t_1,$$

$$x_1(t) = x(t, t_0, \varphi), \quad t \in [\alpha t_1, t_1],$$

решение которого обозначим $x_1(t)$. Для него построим $y_1(t)$ по (21) и (22). Понятно, что для $x_1(t)$ и $y_1(t)$ не должны выполняться условия леммы 3, так как иначе выполнится условие (30). Если выбрать B_1 по формуле (29), то единственное условие, которое может нарушиться, (26). Значит, существует $t \in [\alpha t_1, t_1]$, для которого не выполняется условие (26).

Выберем $t_2 \in [\alpha t_1, t_1]$ такое, что

$$B_1 y_1\left(\frac{t_2}{\alpha}\right) \leqslant |x_1(t_2)| = |x(t_2, t_0, \varphi)|$$

и оно самое «левое» в отрезке $[\alpha t_1, t_1]$. Существование такого t_2 доказано выше.

Мы знаем общий вид решения уравнения (21) с начальными условиями (22):

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1 + 2y_0^2(-a - |b|B^3)(t - t_0)}}.$$

Таким образом

$$|x(t_2, t_0, \varphi)| \geqslant \frac{B_1 |x(t_1, t_0, \varphi)|}{\sqrt{1 + 2y_1^2(t_1)(-a - |b|B_1^3)\left(\frac{t_2}{\alpha} - t_1\right)}}$$

Воспользуемся соотношениями (24), (25), (31)

$$|x(t_2, t_0, \varphi)| \geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{t_1}\left(\frac{t_2}{\alpha} - t_1\right)}}.$$

Окончательно имеем

$$|x(t_2, t_0, \varphi)| \geqslant \varepsilon \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}.$$

Аналогично, построим t_3 по t_2, t_4 по t_3, $\ldots t_n$ по t_{n-1}. Легко видеть, что оценка в этом случае будет иметь вид

$$|x(t_n, t_0, \varphi)| \geqslant \varepsilon \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \sqrt{\frac{t_2}{t_3}} \sqrt{\frac{t_3}{t_4}} \ldots \sqrt{\frac{t_{n-1}}{t_n}} = \varepsilon \sqrt{\frac{t_1}{t_n}}.$$

По построению последовательность $\{t_n\}$ убывает. Легко показать, что при каком-то конечном n выполняется

$$t_n \in \left[t_0, \frac{t_0}{\alpha}\right], \tag{32}$$

для этого достаточно заметить, что в противном случае наша последовательность ограничена снизу и убывает, значит она имеет предел. Для предельной точки соотношение так же выполняется, тогда мы должны были её взять раньше, так как каждый раз берем самую «левую» точку. Далее будем считать, что условие (32) выполнено.

По предудыщей теореме

$$|x(t,t_0,\varphi)| \leqslant \max_{t_1\in[\alpha t_0,t_0]} |\varphi(t_1)|, \quad t\in\left[t_0,\frac{t_0}{\alpha}\right],$$

тогда

$$\varepsilon\sqrt{\frac{t_1}{t_n}} \leqslant \max_{\hat t\in[\alpha t_0,t_0]} |\varphi(\hat t\,)|,$$

$$t_1 \leqslant \frac{t_n}{\varepsilon^2}\left(\max_{\hat t\in[\alpha t_0,t_0]} |\varphi(\hat t\,)|\right)^2,$$

$$t_1 \leqslant \frac{t_0}{\alpha\varepsilon^2}\left(\max_{\hat t\in[\alpha t_0,t_0]} |\varphi(\hat t\,)|\right)^2.$$

Таким образом получили ограничение сверху на t_1, но в самом начале доказательства было показано, что это невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\dot x(t) = -x(t) + 0.5x(0.7t). \tag{33}$$

На рис. 3 изображены графики решений для различных начальных функций:

$$\varphi(t) = \pm R$$

$$\varphi(t) = R\sin(kt), \quad k=\overline{1,10}$$

$$\varphi(t) = \pm R\frac{t-\alpha t_0}{t_0-\alpha t_0}$$

где $t\in[0.7,1]$, $\max\limits_{t\in[0.7,1]} |\varphi(t)| = R = 25$. Видно, что для таких начальных функций решение по модулю убывает с ростом t.

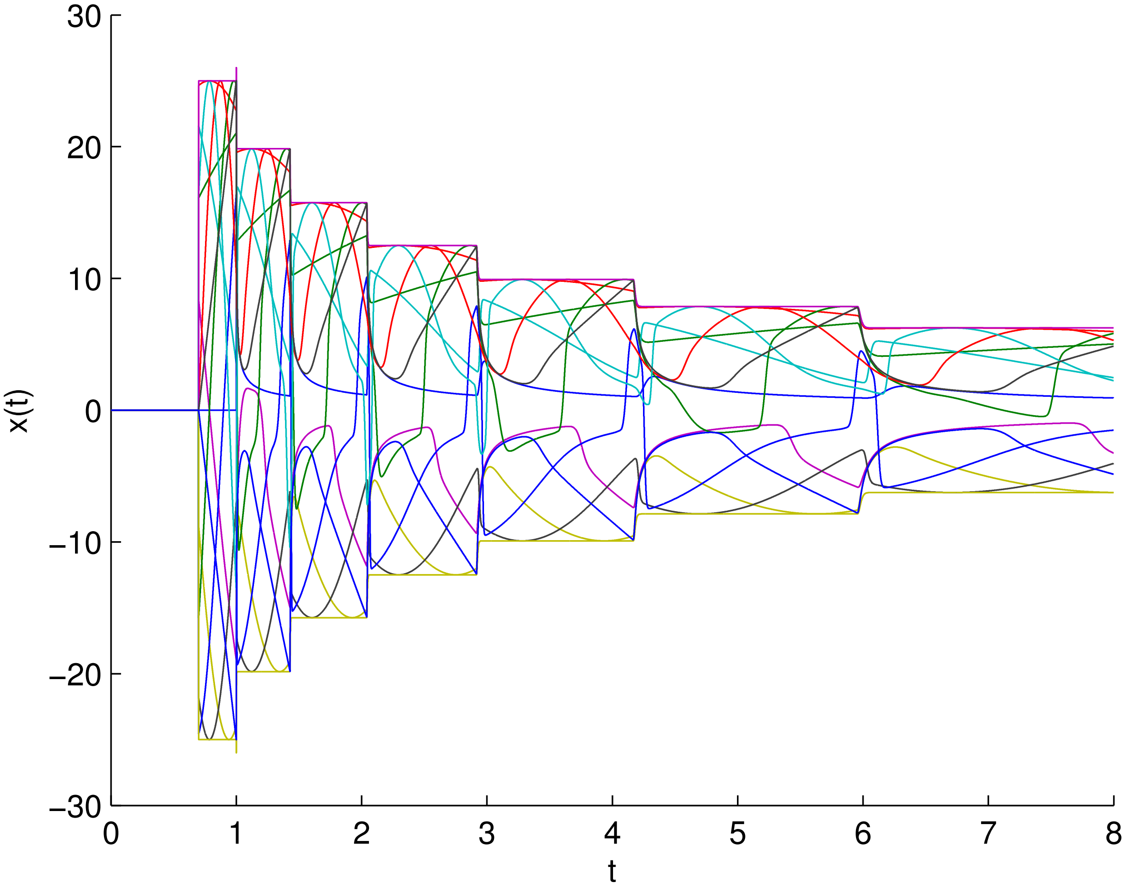

Рис. 3: Графики решений (33)

Глава 3. Численное моделирование

Для иллюстрации устойчивости или неустойчивости нулевого решения уравнения (3) можно применить численное моделирование. Воспользуемся методом шагов, который описан в [2].

Метод шагов подразумевает разбиение числовой оси на отрезки, в каждом из которых исходное дифференциальное уравнение с запаздыванием рассматривается как обыкновенное дифференциальное уравнение. Для уравнения (3) опишем первые несколько шагов:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = ax_1^3(t) + b\varphi^3(\alpha t), \quad t \in \left[t_0, \frac{t_0}{\alpha}\right], \\ \dot{x}_2(t) & = ax_2^3(t) + bx_1^3(\alpha t), \quad t \in \left[\frac{t_0}{\alpha}, \frac{t_0}{\alpha^2}\right], \\ \dot{x}_3(t) & = ax_3^3(t) + bx_2^3(\alpha t), \quad t \in \left[\frac{t_0}{\alpha^2}, \frac{t_0}{\alpha^3}\right], \\ \dot{x}_4(t) & = ax_4^3(t) + bx_3^3(\alpha t), \quad t \in \left[\frac{t_0}{\alpha^3}, \frac{t_0}{\alpha^4}\right], \\ \dots \end{cases}$$

Тогда решение уравнения представимо в виде

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in \left[t_0, \frac{t_0}{\alpha}\right], \\ x_2(t), & t \in \left[\frac{t_0}{\alpha}, \frac{t_0}{\alpha^2}\right], \\ x_3(t), & t \in \left[\frac{t_0}{\alpha^2}, \frac{t_0}{\alpha^3}\right], \\ x_4(t), & t \in \left[\frac{t_0}{\alpha^3}, \frac{t_0}{\alpha^4}\right], \\ \dots \end{cases}$$

По предположению $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная функция при $t \in [\alpha t_0, t_0]$, поэтому на первом шаге воспользуемся методом Эйлера:

$$x_1(t+h) = x_1(t) + h(ax_1^3(t) + b\varphi^3(\alpha t)), \tag{34}$$

здесь и далее h — шаг интегрирования. На втором и последующих шагах начальная функция $x_{i-1}(t)$ уже как минимум кусочно-дифферецируема при $t \in \left[\frac{t_0}{\alpha^{i-2}}, \frac{t_0}{\alpha^{i-1}}\right]$. Воспользуемся здесь видоизмененым, в силу вида правой части уравнения, методом Рунге-Кутты второго порядка:

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h(ax_i^3(t) + bx_{i-1}^3(\alpha t)) + h^2(3ax_i^2(t)\dot{x}_i(t) + 3\alpha bx_{i-1}^2(\alpha t)\dot{x}_{i-1}(\alpha t)).$$

Расписывая производные, получаем

$$
\begin{aligned}
x_i(t+h) = x_i(t)+&\\
&+h(ax_i^3(t)+bx_{i-1}^3(\alpha t))+\\
&+3h^2ax_i^2(t)(ax_i^3(t)+bx_{i-1}^3(\alpha t))+\\
&+3h^2\alpha bx_{i-1}^2(\alpha t)(ax_{i-1}^3(\alpha t)+bx_{i-2}^3(\alpha^2 t)),
\end{aligned}
\tag{35}
$$

где $x_0(t) = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha t_0, t_0]$.

Выражения (34) и (35) дают вычислительную схему для всех $x_i(t)$ и представляют собой основной компонент построенного численного метода.

В алгоритме используется постоянный шаг интегрирования h. Так как нам неизвестно поведение конкретного решения, то разумно использовать равномерную сетку. Кроме того, это позволяет быстро по t узнавать ячейку памяти, в которой хранится соответствующее значение фазовой переменной, по формуле $k = \left[\frac{t-t_0}{h}\right]$, что существенно ускоряет работу программы.

Данный численный метод использовался в примерах при построении графиков на рис. 1, 2 и 3

Выводы

- Во время решения поставленной задачи по построению области асимптотической устойчивости для нулевого решения однородного уравнения (3) была доказана теорема, гарантирующая асимптотическую устойчивость в целом при некоторых условиях на коэффициенты уравнения

$$|b| < -a,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \sqrt[3]{\frac{-a}{|b|}}.$$

- В работе [10] показано, что уже первое условие из этих двух является достаточным для асимптотической устойчивости нулевого решения. Значит, и для случая, когда второе условие не выполняется, область асимптотической устойчивости может не совпадать со всем пространством.

- При построении области асимптотической устойчивости в данной ВКР использовался подход Разумихина. Ожидается, что при применении метода функционалов Ляпунова-Красовского второе условие для параметров уравнения можно будет ослабить.

- Построен численный метод, с помощью которого можно оценить область асимптотической устойчивости перебором параметров уравнения и явным построением решений.

Заключение

В работе доказана устойчивость в целом для нулевого решения однородного уравнения с линейным запаздыванием при некоторых ограничениях на коэффициенты этого уравнения.

Также предложен метод для численного построения решения данной задачи при других условиях.

Список литературы

[1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

[2] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

[3] Зубов В. И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1984. 232 с.

[4] Разумихин Б. С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // АиТ, 1960. Т. 21. Вып. 6. С. 740–748.

[5] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: ГИЗ ФИЗМАТЛИТ, 1959. 211 с.

[6] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica, 2003. Vol. 39. P. 15–20.

[7] Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // Вестник СпбГу, 2005. Сер. 10. Вып. 1. С. 110-117

[8] Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. II. Матрицы Ляпунова // Вестник СпбГу, 2005. Сер. 10. Вып. 2. С. 199-207

[9] Меденников И. П. Прямой метод анализа устойчивости систем с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник СпбГУ, 2014. Сер. 10. Вып. 3. С. 125–140

[10] Жабко А. П., Чижова О. Н. Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник СпбГУ, 2015. Сер. 10. Вып. 3. С. 105–115

[11] Жабко А. П., Чижова О. Н. Гибридный метод анализа устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник ТГУ, 2015. Т. 20. Вып. 4. С. 843–850

[12] Zhabko A., Chizhova O., Zaranik U. Stability analysis of the linear time delay systems with linearly increasing delay // Cybernetics and Physics, 2016. Vol. 5, №2, P. 67–72

[13] Гребенщиков Б. Г., Новиков С. И. О неустойчивости системы с линейным запаздыванием, приводимой к сингулярно возмущенной системе // Известия вузов. Математика, 2010. Вып. 2, С. 3–13